جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر: نظرية الشبكات
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2017/2016

اسم الطالب:
المدة: ساعة ونصف
العلامة: 100

السؤال الأول: (16 علامة) أ- أوجد الحد الأعلى الأصغري للمجموعة A في كل من الحالات الآتية: (إن وجد)

- إذا كانت $A = \{4, 5, 6\}$ مجموعة جزئية من $(N^*, |)$.
- إذا كانت $A = Q \cap [1, \sqrt{5}]$ مجموعة جزئية من $(Q, \leq)$.
- إذا كانت $A = \{5, 6, 7, 8\}$ مجموعة جزئية من $(N, \leq)$.

ب- ليكن $f: E \to F$ إيزومورفيزم ترتيب، ولتكن A مجموعة جزئية من E تملك حد أعلى أصغري S في E، فأثبت أن $f(A)$ تملك حد أعلى أصغري في F هو $f(S)$.

السؤال الثاني: (18 علامة) أ- ليكن $f: E \to F$ $\vee$- إيزومورفيزم من نصف الشبكة العليا E على نصف الشبكة العليا F، فأثبت أن f يكون إيزومورفيزم ترتيب.

ب- ارسم الشبكة $(D(60), |)$، ثم أذكر مرشحين ومثاليين فيها وبين فيما إذا كانت أساسية أم لا (مع ذكر السبب)

السؤال الثالث: (25 علامة) أ- إذا كانت E سلسلة فهل هي متممة ولماذا؟

- إذا كانت E مجموعة غير خالية فهل أن $(P(E), \subseteq)$ تكون شبكة متممة ولماذا؟

ب- إذا كانت E شبكة توزيعية فأثبت أنه $\forall\ x, y, z \in E$ فإن:

$(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$.

ج- إذا كانت F مرشحة في الشبكة E، لنعرف العلاقة R على E بالشكل التالي:

$xRy \Leftrightarrow \exists a \in F ; x \wedge a = y \wedge a$ برهن أن R علاقة تكافؤ على E.

السؤال الرابع: (25 علامة) أ- بين أي من الشبكات الآتية هي شبكة بول مع ذكر السبب

$(D(2), |), (D(6), |), (D(12), |), (D(30), |), (D(60), |)$

ب- إذا كان f مورفيزم شبكة من الحلقة البوليانية A في الحلقة البوليانية B بحيث أن $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$ فأثبت أن f مورفيزم بولياني.

ج- لتكن A و B حلقتين بوليانيتين و f مورفيزم بولياني من A في B وإذا كانت I مثالية في B فأثبت أن $f^{-1}(I)$ تكون مثالية في A.

السؤال الخامس: (16 علامة) ليكن A جبر بول و a, b عنصرين ثابتين في A ولتكن المعادلة $ax + b = 0$ في A والمطلوب:

1) أثبت أن حلول المعادلة تعطى بالمتراجحة المزدوجة $b \leq x \leq a + b + 1$.
2) حل المعادلة $35x + 5 = 0$ في $D(70)$.

حمص في 2017/1/23

د. عصام نسيم

رياضيات ٤ (1)

سلم تصحيح مقرر نظرية الشبكات

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٦/٢٠١٧

(السؤال) الأول: 16

60 هو حد أعلى أصغري للمجموعة A في $(N^*, |)$ (2)

A لا تملك حد أعلى أصغري في $(Q, \le)$ (2)

8 هو حد أعلى أصغري للمجموعة A في $(W, \le)$ (2)

(ليكن) $x' \in f(A)$ ⇐ توجد $x \in A$ بحيث يكون $x' = f(x)$ ولكن $x \le s$ ⇐

$x' = f(x) \le f(s)$ ⇐ $f(s)$ حد أعلى المجموعة $f(A)$. (5)

(ليكن) m' حد أعلى آخر للمجموعة $f(A)$ في F ⇐ يوجد $m \in E$ وهو وحيد

(بحيث) يكون $m' = f(m)$ ومن أجل أي x من A يكون $f(x) \le f(m)$ ⇐ $x \le m$

(أي أن) m هي حد أعلى للمجموعة A ⇐ $s \le m$ ⇐ $f(s) \le f(m) = m'$

(أي) أن $f(s)$ حد أعلى أصغري للمجموعة $f(A)$ في F. (5)

(السؤال) الثاني: 18

ليكن f V-ايزومورفيزم من E على F عندها يعني أن f تقابل ومتزايد (لأنه V-مورفيزم) كما أن f^{-1} تطبيق متزايد وذلك لأنه بفرض أن

$f(x) \le f(y)$ ⇐ $f(x) \vee f(y) = f(y)$ ⇐ $f(x \vee y) = f(y)$ ⇐ $x \vee y = y$ (8)

⇐ $x \le y$ وبالتالي فإن f ايزومورفيزم ترتيب.

(2)

$F_6 = \{6, 12, 30, 60\}$

$F_3 = \{3, 6, 15, 30, 12, 60\}$ (3)

$I_6 = \{1, 2, 3, 6\}$

$I_3 = \{1, 3\}$ (3)

(كل) هذه المرشحات والمثاليات أساسية لأن $D(60)$ مجموعة منتهية (2)

السؤال الثالث: 25

كانت E سلسلة تملك 0 و 1 فتكل كل منها متمم الآخر (12)

$(P(E), \subseteq)$ شبكة متممة لأن أي عنصر $X \in P(E)$ يملك متمم هو X (CX هو متمم X بالنسبة لـ E. (3)

$(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x) =$

$[x\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)]\wedge[y\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)] =$ (5)

$[x\vee(y\wedge z)]\wedge[y\vee(z\wedge x)] = (x\vee y)\wedge(x\vee z)\wedge(y\vee z)\wedge(\ldots$

$(x\vee y)\wedge(y\vee z)\wedge(z\vee x)$ (5)

- $\forall x\in E$ و $\forall a\in F$ نجد أن $x\wedge a = x\wedge a \Leftarrow xRx$
أي أن R انعكاسية

- بفرض أن xRy فإنه يوجد $a\in F$ بحيث يكون $x\wedge a = y\wedge a$ (5)
$\Leftarrow$ يوجد $a\in F$ بحيث يكون $y\wedge a = x\wedge a \Leftarrow yRx$
أي أن R تناظرية

- بفرض أن xRy و yRz $\Leftarrow$ يوجد $a,b\in F$ بحيث يكون

$x\wedge a = y\wedge a$ و $y\wedge b = z\wedge b$ ومنه

$x\wedge(a\wedge b) = (x\wedge a)\wedge b = (y\wedge a)\wedge b = (y\wedge b)\wedge a$ (5)

$= (z\wedge b)\wedge a = z\wedge(a\wedge b)$

وبما أن $a\wedge b\in F$ فإن xRz وبالتالي فإن R علاقة تكافؤ

السؤال الرابع: 25

- شبكات بول $(D(2), |)$ (2) و $(D(6), |)$ (2) و $(D(30), |)$ (2)

لأن كل من 2 و 6 و 30 لا تقبل القسمة على مربع عدد أولي (2)

- من أجل أي $x\in A$ نجد أن:

$$x\wedge x' = 0 \Rightarrow f(x\wedge x') = f(0) \Rightarrow f(x)\wedge f(x') = 0$$
$$x\vee x' = 1 \Rightarrow f(x\vee x') = f(1) \Rightarrow f(x)\vee f(x') = 1$$
$\} \Rightarrow (f(x))' = f(\ldots$

بالتالي فإن f مورفيزم بولياني (9)

أ. أن $f(0)=0\in I \Leftarrow 0\in f^{-1}(I)$ (2)

نفرض أن $x\in f^{-1}(I)$ و $y\le x \Leftarrow f(y)\le f(x)$ & $f(x)\in I \Leftarrow$

$f(y)\in I \Leftarrow y\in f^{-1}(I)$ (3)

بما أن $x\in f^{-1}(I)$, $y\in f^{-1}(I) \Leftarrow f(x)\in I$ و $f(y)\in I \Leftarrow$

$f(x)\vee f(y) \Leftarrow f(x\vee y)\in I \Leftarrow x\vee y\in f^{-1}(I)$

$f^{-1}(I)$ مثالية في A (3)

السؤال الخامس: 16

$ax+b=0 \Leftarrow ax+b+b=0+b \Leftarrow x\geqslant ax=b$

ومنه $b\le x$

$(a+b+1)x = ax+bx+x = ax+b+x = 0+x = x \Rightarrow$

$x\le a+b+1$

ينتج أن $b\le x\le a+b+1$ (8)

$5\le x\le 35+5+1 \Leftarrow 5\le x\le 35+5' \Leftarrow 5\le x\le 35+14$

$\Leftarrow 5\le x\le (35\wedge 5)\vee(2\wedge 14) \Leftarrow 5\le x\le 5\vee 2 \Leftarrow 5\le x\le 10$

بما أن $D(70)=\{1,2,5,7,10,14,35,70\}$ فإن $x\in\{5,10\}$ (8)

مدرس المقرر

د. عصام نسيم